



Influencia de la difusividad en un modelo matemático para el procesamiento de alimentos en altas presiones

Diffusivity influence on a mathematical model for the high pressure processing of foods

Marcos Zambrano Fernández^{1*} 

¹ Universidad Nacional de Barranca, Lima, Perú

RESUMEN

El perfil de temperatura es investigado mediante un modelo matemático relacionado con el tratamiento no térmico del procesamiento de alimentos a altas presiones. Este modelo matemático involucra un término fuente de la presión ejercida sobre el alimento sólido. La solución numérica del modelo matemático es obtenida por medio de herramientas computacionales de software libre y que permiten a la vez la visualización gráfica de la magnitud del efecto difusivo de la temperatura en diversos tiempos del procesamiento de alimentos y como este efecto tiene relevancia en la frontera de la geometría del alimento.

Palabras clave: modelo matemático, tratamiento no térmico, procesamiento de alimentos, herramientas computacionales, software libre.

ABSTRACT

The temperature profile is investigated via a mathematical model related to the nonthermal-treatment of food processing by high pressure. The mathematical model involves a source term of the exerted pressure on the solid food. Numerical solution of the mathematical model is obtained via computational tools of free software which allow the graphical visualization of the temperature in several times of the processing of foods and how this effect is relevant in the boundary of the food geometry.

Keywords: mathematical model, nonthermal treatment, food processing, computational tools, free software.

Cómo citar / Citation: Zambrano, M. (2025). Influencia de la difusividad en un modelo matemático para el procesamiento de alimentos en altas presiones. QuantUNAB,4(2), exx. <https://doi.org/10.52807/qunab.v4i2.104>

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene por objetivo mostrar la influencia del término difusivo en el modelo matemático para determinar la temperatura en un proceso de alimentos por altas presiones presentado por Smith *et al.* (2014). Si bien el trabajo de Smith *et al.* (2014) muestra el modelo matemático y la solución numérica mediante técnicas matemáticas, no muestra la influencia de la difusividad en el modelo presentado.

En la actualidad existe un creciente interés por conocer tecnologías que permitan preservar las propiedades benéficas de los alimentos y una de ellas es conocida como *tecnología de las altas presiones* o *High Pressure Processing* (HPP). Aspectos relevantes de la historia de esta técnica pueden ser encontrados en el trabajo de Balabsubramanian, Martínez y Gupta (2015).

Asimismo, es conocido que una de las ventajas de HPP es la inactivación microbial aparte de preservar el alimento y sus propiedades como es señalado por Cheftel (1995) y que es considerado un tratamiento no-térmico que a diferencia de los tratamientos térmicos permite conservar las propiedades benéficas que existen en el alimento.

Relacionado con el creciente interés en el procesamiento de los alimentos, se encuentra la búsqueda de tecnologías que permitan una uniformidad en la temperatura del alimento y precisamente, la tecnología HPP permite esa distribución como es explicado por Otero *et al.* (2007).

2. METODOLOGÍA

Por lo general los experimentos llevados a cabo mediante la tecnología HPP son llevados a cabo sobre un cilindro de acero (Smith *et al.*, 2014) por lo cual el modelo matemático describe la geometría cilíndrica y la ecuación que determina la temperatura T está dada por

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \gamma \frac{dP}{dt} T,$$

donde ρ, c_p y k denotan la densidad, capacidad calórica y conductividad térmica del alimento dentro del cilindro respectivamente. Por otro lado, γ denota el coeficiente de expansión térmica y P la presión aplicada sobre el alimento. En esta descripción r, z denotan las coordenadas radial y azimutal respectivamente.

Para llevar a cabo los análisis a fin de evaluar la influencia de la difusividad, la ecuación anteriormente dada es transformada mediante un proceso llamado nondimensionalización de acuerdo a la temperatura interna inicial T_0 y a la temperatura externa constante T_r mediante

$$\theta = \frac{T - T_r}{T_0 - T_r}$$

y que con las coordenadas espaciales y temporales obtenidas de

$$R = \frac{r}{H}, Z = \frac{z}{L} \text{ y } \tau = \frac{t}{[t]},$$

donde H , L denotan el radio y la semi altura del cilindro respectivamente, permiten obtener la ecuación:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + b \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + c\theta + 1,$$

Donde los valores de a , b y c son obtenidos de las propiedades físicas del alimento y la geometría del cilindro que lo contiene y pueden encontrarse en el artículo publicado por Smith *et al.* (2014). La Tabla 1 muestra el valor numérico de estos valores.

Tabla 1
Coeficientes de la ecuación no dimensionalizada

a	b	c
0.021	0.005	0.071

Los coeficientes mostrados en la Tabla 1 muestran que la difusividad en el eje azimutal es bastante menor que en el eje radial por lo cual es posible analizar el valor de θ con cierto grado de precisión al considerar solamente la difusión en el eje radial al considerar la ecuación:

$$\frac{\partial \theta_R}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_R}{\partial R} \right) + c\theta_R + 1.$$

Para resolver la ecuación anterior, consideramos la temperatura inicial interna $\theta = 1$ y la temperatura constante externa $\theta = 0$ de forma que para valor del tiempo podemos obtener una distribución de temperaturas en el eje radial, donde el eje de simetría tiene la máxima temperatura mientras que en el contorno el alimento la temperatura es mínima.

Sea θ_R la temperatura en el eje radial considerando la difusividad que es obtenida de la solución anterior con las condiciones mencionadas en el párrafo anterior. En este caso tenemos $\alpha \neq 0$ en la misma ecuación anterior. Asimismo, sea θ_p la temperatura del alimento que es obtenida cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando no existe difusividad. De esta forma podemos observar la influencia de la difusividad en la tecnología HPP.

En la ecuación para θ_R tenemos que al transcurrir el tiempo (o incrementar el valor de τ) el valor cambia y es influenciado por la condición en la frontera dada por $\theta = 0$. este cambio aparece en la derivada de θ con respecto al tiempo como es descrito por Pinchover y Rubinstein (2005).

Para obtener la diferencia $|\theta_R - \theta_p|$ que indique la influencia de la difusividad, es necesario obtener la solución numérica de la ecuación anterior dado que no existe una solución analítica. Para obtener esta solución numérica existen diversas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales parciales como las descritas por Tannenhill, Anderson y Pletcher (1997).

Asimismo, el proceso de resolver numéricamente una ecuación diferencial implica aproximar los términos que la conforman para posteriormente obtener un conjunto de ecuaciones conformadas por los valores de θ_R a lo largo del eje radial con $0 \leq R \leq 1$. En el presente trabajo ha sido usado el método de diferencias finitas para obtener estos valores de θ_R . Este método está descrito por Quarteroni, Saco y Saleri (2000) en detalle.

También es posible encontrar detalles importantes relacionados con la estabilidad de la técnica de diferencias finitas en el trabajo de Leveque (2007), donde el análisis de estabilidad resulta importante para obtener la solución numérica y así evitar problemas en su implementación.

Para la implementación computacional existen diversos lenguajes de programación, y software para resolver ecuaciones diferenciales como la considerada en el presente artículo, algunos de estos software son descritos por Burden y Faires (2012) y son relacionados con las técnicas numéricas empleados en el método de diferencias finitas.

Recientemente, para resolver ecuaciones diferenciales el software libre GNU-Octave es empleado debido a su flexibilidad en la implementación de código computacional. Los procedimientos para la implementación o programación computacional son descritos por Eaton, Bateman, Hauberg y Wehbring (2018). Asimismo, GNU-Octave permite llevar a cabo la visualización gráfica de los resultados obtenidos en la solución numérica de una ecuación diferencial.

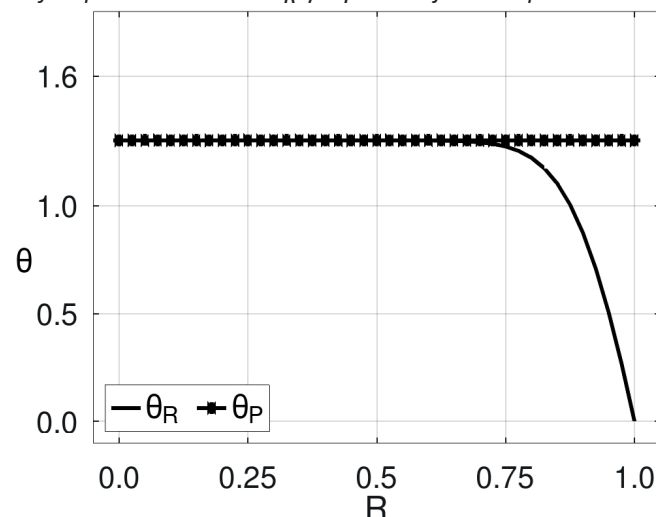
En el presente artículo, se ha empleado GNU-Octave para obtener los valores numéricos de θ_R mediante el método de Euler implícito como esquema numérico con un paso de tiempo dado por $\Delta\tau=0.01$ garantizando su estabilidad y para la variable espacial se ha utilizado la aproximación de segundo orden para $\frac{\partial^2\theta_R}{\partial R^2}$. Asimismo, la validez viene dado por la consistencia de los esquemas numéricos empleados. Posteriormente se ha llevado a cabo la gráfica con las herramientas que GNU-Octave provee.

3. RESULTADOS

Los resultados numéricos obtenidos al resolver la ecuación para θ_R para $\alpha \neq 0$ fueron comparados con θ_P y la figura 1 muestra ambas gráficas, donde alrededor del eje radial tenemos que coinciden pero a medida que se aproximan a $R = 1$ la diferencia se incrementa gradualmente. La comparación mostrada en la figura 1 es mostrada para el valor de $\tau = 0.28$ dado que inicialmente la temperatura internamente era de $\theta = 1$.

Figura 1

Gráfica para $\tau = 0.28$ de θ_R y θ_P en el eje radial para $0 \leq R \leq 1$.



Asimismo, en el caso de $\alpha = 0$ fue encontrada la solución analítica para θ_P teniendo en cuenta la condición inicial $\theta = 1$ y esta viene dada por la expresión:

$$\theta_P(\tau) = -\frac{1}{c} + \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^{c\tau}.$$

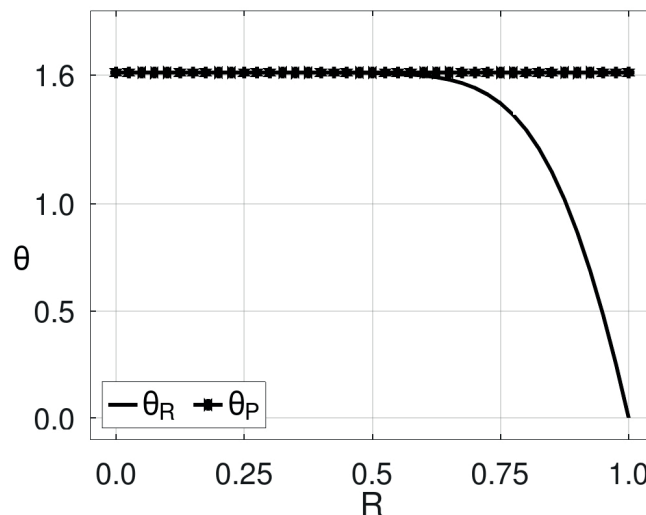
Así, podemos apreciar claramente que el valor numérico de θ_P incrementa a medida que el tiempo se incrementa y esto también acontece para θ_R debido al término fuente dado por la presión que es aplicada al alimento por lo cual tenemos que para θ es creciente para un incremento en el valor de τ .

Continuando con el cálculo de la solución de la ecuación para θ_R se obtuvo los valores numéricos para $\tau = 0.56$ que viene a ser el valor máximo de τ para la aplicación de un incremento de presión como esta señalado por Smith *et al.* (2014). Estos valores numéricos fueron obtenidos como resultado de la implementación computacional para resolver mediante diferencias finitas la ecuación para θ_R .

En la figura 2 puede apreciarse las gráficas de los valores numéricos para θ_R y θ_P desde $R = 0$ hasta $R = 1$ cuando $\tau = 0.56$ y muestra que la influencia de la difusividad es mayor para valores de R cercanos a $R = 1$. Sin embargo, puede asimismo apreciarse que para valores cercanos al eje radial ambas gráficas coinciden por lo cual el efecto de la difusividad es nulo prácticamente.

Figura 2

Gráfica para $\tau = 0.56$ de θ_R y θ_P en el eje radial para $0 \leq R \leq 1$



De los resultados mostrados mediante las figuras 1 y 2 podemos verificar que la temperatura en el eje radial o eje de simetría puede ser aproximada por θ_P por lo cual es importante ver la variación de la temperatura con respecto al tiempo en dicho eje. También debemos tener en cuenta a medida que nos alejamos del eje radial la influencia de difusividad se incrementa por lo que el valor de θ_P carece de sentido al aproximar el valor de la temperatura.

De esta forma, en la región donde la diferencia $|\theta_R - \theta_P|$ empieza a incrementarse es conveniente la solución numérica para θ_R que en presente artículo fue obtenida por el método de diferencias finitas para $\alpha \neq 0$. Es importante señalar que esta diferencia en el momento inicial o cuando $\tau = 0$ era nula debido a

$$\theta_P(0) = -\frac{1}{c} + \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^{c \cdot 0} = 1,$$

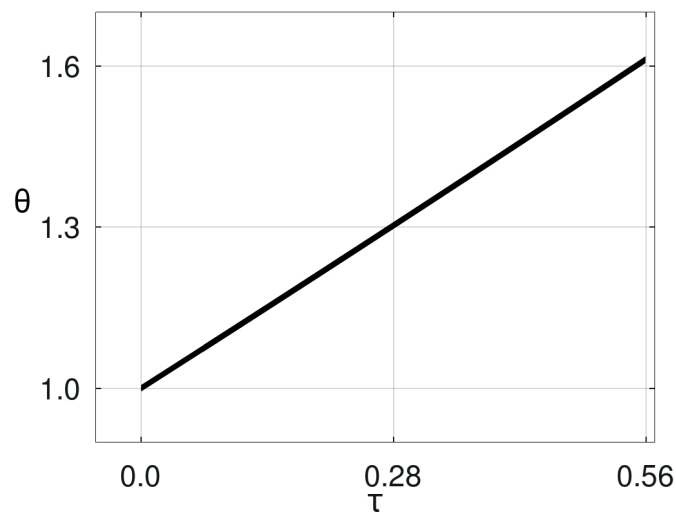
que es precisamente la temperatura inicial del alimento o el valor asignado como condición inicial a la ecuación para θ_R , es decir, $\theta_R(R, \tau) = 1$ para $\tau = 0$ y con ello tenemos que

$$\theta_R(R, 0) - \theta_P(0) = 1 - 1 = 0.$$

En la figura 3, es mostrada la gráfica de θ versus τ en el eje radial, es decir, $\theta(0, \tau)$ para diversos valores desde $\tau = 0$ hasta $\tau = 0.56$ y puede apreciar un incremento gradual de la temperatura debido al incremento de presión ejercida sobre el alimento. De ahí puede observarse que en el momento inicial o $\tau = 0$ tenemos $\theta = 1$ que corresponde a la condición inicial anteriormente señalada.

Figura 3

Gráfica de θ versus τ en el eje radial.



A fin de apreciar numericamente, la influencia de la difusividad en la tecnología HPP, la Tabla 2 muestra los valores numéricos obtenidos al resolver la ecuación para θ_R y su diferencia respecto a θ_P para $\tau_P = 0.56$. En esta tabla puede verse claramente que la influencia se acentúa al aproximarse a $R = 1$.

Tabla 2

Valores numéricos obtenidos para θ_R y su diferencia respecto a θ_P .

R	$\theta_R(R, \tau_P)$	$ \theta_R(R, \tau_P) - \theta_P(\tau_P) $
0.1	1.6119	0.0002
0.2	1.6119	0.0002
0.3	1.6117	0.0000
0.4	1.6108	0.0009
0.5	1.6064	0.0053
0.6	1.5881	0.0236
0.7	1.5224	0.0893
0.8	1.3262	0.2855
0.9	0.8590	0.7527
1.0	0.0000	1.6117

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos, podemos afirmar que aunque θ_P no considera los efectos difusivos que están considerados en la ecuación radial, podemos obtener el valor de la temperatura en el eje de simetría mediante $\theta_P(0)$ como se muestra en la figura 2. Esta temperatura resulta ser

$$\theta^* = -\frac{1}{c} + \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^{c \times 0.56} = 1.6118 \quad .$$

Asimismo, de acuerdo a Smith *et al.* (2014) tenemos que las temperaturas en el contorno e inicial son 292K y 313K respectivamente. Con ello, tenemos que la temperatura en el eje de simetría luego de aplicar la presión está dada por $T^* = 325K$.

Mediante los cálculos llevados a cabo en el presente artículo, hemos podido verificar que el efecto difusivo de la ecuación radial tiene relevancia a medida que la coordenada radial se acerca a la unidad de forma que el gradiente de temperatura asume valores negativos como puede apreciarse en la figura 2.

Esto permite ver que el presente trabajo a diferencia de Smith *et al.* (2014) permite concluir que la temperatura en el eje de simetría es influenciada mayormente por el término de la presión aplicada al alimento que por el efecto difusivo del calor generado.

Asimismo, si bien los resultados provienen de un enfoque unidimensional, resultan ser válidos debido a que la difusión en el eje azimutal es mucho menor que en el eje radial al verificarse que $a \gg b$ como puede verse en la tabla 1.

Para concluir, tenemos que cuando las condiciones en el contorno son de temperatura fija o de tipo Dirichlet la difusividad tienen mayor influencia a media de la coordenada radial se acerca al contorno, asimismo, el valor de la temperatura es lineal respecto al tiempo transcurrido desde el inicio del procedimiento como esta mostrado en la figura 3.

Un estudio posterior puede tener como objetivo verificar los resultados obtenidos en el presente trabajo cuando las condiciones en contorno son de tipo convectivo o de tipo Robin el cual considera la temperatura del medio ambiente.

FINANCIAMIENTO

El presente trabajo ha sido apoyado por los recursos provenientes del proyecto “Un nuevo perfil para las marcas de oscilación en procesos de fundición continua” financiada por la Universidad Nacional de Barranca con R.C.O. N° 843-2023-UNAB.

REFERENCIAS

- Smith, N. A. S. (2014). “Analysis and simplification of a mathematical model for the high-pressure food processes”. *Apple. Math*, 226(1), 20-37.
- Balasubramaniam, V. M., Martínez-Monteagudo S.I. y Gupta R. (2015). “Principles and Application of High Pressure-Based Technologies in the Food Industry”. *Reviews in Advance*, 6(1), 1-19.
- Cheftel J.C. (1995). “Review: High pressure, microbial inactivation and food preservation, *Food Sci. Techlog*”. 1(2), 75-90.
- Otero, L., Ramos A.M., Elvira C. y Sanz P.D. “A model to design high pressure processes towards a uniform temperature distribution”. *J. Food Eng.* 78, 1463-1470.
- Pinchover, Y. y Rubinstein, J. (2005). “An. Introduction to Partial Differential Equations”. Cambridge University Press. UK.
- Tannenhill J.C., Anderson D.A. y Pletcher D.H. (1997). “Computational Fluid Mechanics and heat transfer”. Taylor & Francis publishers - USA.
- Quarteroni, A., Sacco R. y Saleri F. (2000). “Numerical Mathematics”. Springer - USA.
- LeVeque, R. J. (2007). “Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations”. University of Washington, SIAM - USA.
- Burden, R y Faires, J. (2012). “Numerical Analysis”. 3ra Edición. Brooks/Cole.
- Eaton, J.W., Bateman, D, Hauberg, S y Wehbring.(2018). R. “GNU-OCTAVE - Free your numbers”. Boston - USA.